

Théorème de Bézout - Bézout (XVII^e s.):

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$, alors il existe deux entiers relatifs $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que

$$a \cdot x + b \cdot y = \text{PGCD}(a, b).$$

Conséquences: Si a, b sont premiers entre eux,
 $\text{PGCD}(a, b) = 1$

$\Rightarrow$ l'équation $a \cdot x + b \cdot y = 1$ a au moins une sol. entière.

Exemples: 4 et 6 ne sont PAS premiers entre eux car $\text{PGCD}(4, 6) = 2$

$$6 \cdot x + 4 \cdot y = 2$$

$$6 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = 2 \checkmark$$

$$6 \cdot (-1) + 4 \cdot (2) = -6 + 8 = 2 \checkmark$$

} il y a plusieurs solutions

$$y = 2 - 6x$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$$

↳ équ. d'une droi., l'équation a une INFINITE de solutions, mais aussi une INFINITE de sol. entières.

Exercice: Calculez les coeff. de Bézout pour $a = 54$ et $b = 22$

Exercice: Calculez les coeff. du Bézout pour $a = 54$ et $b = 22$!

1) $\text{PGCD}(54, 22) = 2$

2) $(A \in \mathbb{Z})$ $54 \times (-2) + 22 \times 5 = -108 + 110 = 2 \checkmark$

$$54x + 22y = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{11} - \frac{27}{11}x$$

$1 - 27x$ doit être multiple de 11

Algorithme d'Euclide Étendu :

Input: $a, b \in \mathbb{N}^*$ ($a \gg b$)

Objectif: Calculer $\text{PGCD}(a, b)$ et les coeff. du Bézout, x et $y \in \mathbb{Z}$, tels que $a \cdot x + b \cdot y = \text{PGCD}(a, b)$

Algo:

Initialisation:

Étape 0: $r_0 = a$ $x_0 = 1$ $y_0 = 0$

Étape 1: $r_1 = b$ $x_1 = 0$ $y_1 = 1$

Tant que $r_i \neq 0$, faire

Résoudre $r_i = r_{i-2} \times q_i + r_{i-1}$ (division Euclidienne)

Pose $x_i = x_{i-2} - q_i \cdot x_{i-1}$ et $y_i = y_{i-2} - q_i \cdot y_{i-1}$

end.

Quand $r_h = 0$ (dernière étape) alors

$$\text{PGCD}(a, b) = r_{h-1} = a \cdot x_{h-1} + b \cdot y_{h-1}$$

SIGNIFICATION

$$r_i = a \cdot x_i + b \cdot y_i$$

$$r_0 = a = a \cdot 1 + b \cdot 0$$

$$r_1 = b = a \cdot 0 + b \cdot 1$$

Étape 2

$$\begin{array}{r} a \overline{) b} \\ r_2 \end{array}$$

$$x_2 = x_0 - q_2 \cdot x_1 = 1$$

$$y_2 = y_0 - q_2 \cdot y_1 = -q_2$$

⋮

$$\begin{array}{r} r_{h-2} \overline{) r_{h-1}} \\ 0 \end{array}$$

STOP l'étape $h-1$ qui donne le résultat !

$$\text{PGCD}(a, b) = r_{n-1} = a \cdot \underbrace{x_{n-1}}_x + b \cdot \underbrace{y_{n-1}}_y$$

coeff. Bézout

- si on a le rep. n-1 qu. donne le résultat!

Exemple: $\text{PGCD}(54, 22) = 54 \cdot x + 22 \cdot y$, trouver $\text{PGCD}(54, 22)$, x et y !

E0:

$$\underline{x_0} = 1 \quad y_0 = 0 \quad 54 = \underline{1} \cdot 54 + \underline{0} \cdot 22$$

E1:

$$\underline{x_1} = 0 \quad y_1 = 1 \quad 22 = \underline{0} \cdot 54 + \underline{1} \cdot 22$$

E2:

$$\begin{array}{r|l} r_0 & r_1 \\ 54 & 22 \\ 10 & 2 \\ \hline r_2 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_{2-2} - q_2 \cdot x_{2-1} = 1 - 2 \cdot 0 = \underline{1} \\ y_2 &= y_0 - 2 \cdot y_1 = 0 - 2 \cdot 1 = \underline{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= r_0 \cdot x_2 + r_1 \cdot y_2 \\ 10 &= 54 \cdot 1 + 22 \cdot (-2) \end{aligned}$$

E3:

$$\begin{array}{r|l} r_1 & r_2 \\ 22 & 10 \\ 2 & 2 \\ \hline r_3 & \end{array}$$

$$x_3 = x_1 - 2 \cdot x_2 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$$

$$y_3 = y_1 - 2 \cdot y_2 = 1 - 2 \cdot (-2) = 1 + 4 = 5$$

$$2 = -2 \cdot 54 + 5 \cdot 22$$

⚠ SIGNES

E4:

$$\begin{array}{r|l} r_2 & r_3 \\ 10 & 2 \\ 0 & 5 \\ \hline \end{array}$$

STOP

$$\text{PGCD}(54, 22) = 2 = 54 \cdot \underline{(-2)} + 22 \cdot \underline{5}$$

Exercice: trouver $\text{PGCD}(168, 68)$ et leurs coeff. de Bézout.

Init:

$$r_0 = 168$$

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = 0$$

$$r_1 = 68$$

$$x_1 = 0$$

$$y_1 = 1$$

$$r_2 = \underline{32}$$

$$x_2 = 1$$

$$y_2 = -2$$

$$\begin{array}{r|l} 168 & 68 \\ 32 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$x_2 = 1 - 2 \cdot 0 = 1$$

$$y_2 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$$

$$\underline{r_3} = 4$$

$$x_3 = -2$$

$$y_3 = 5$$

$$\begin{array}{r|l} 68 & 32 \\ 4 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$x_3 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$$

$$\underline{r_3} = 4$$

$$x_3 = -2$$

$$y_3 = 5$$

$$\begin{array}{r} 68 \mid 32 \\ \underline{4} \mid \underline{2} \end{array}$$

$$x_3 = 0 - \underline{2} \cdot 1 = -2$$

$$y_3 = 1 - 2(-2) = 5$$

$$r_4 = 0$$

STOP

$$x_4 = 1 - \underline{8} \cdot (-2) = 17$$

$$y_4 = -2 - \underline{8} \cdot 5 = -42$$

$$\begin{array}{r} 32 \mid 4 \\ 0 \mid \underline{8} \end{array}$$

$$168 \cdot \underline{17} + 68 \cdot (-\underline{42}) = 0$$

Réponse:

$$PGD(168, 68) = 4 = 168 \cdot (-\underline{2}) + 68 \cdot \underline{5}$$